

Concursul de Matematică și Informatică "Grigore Moisil"
Ediția a III-a, Urziceni, 2-4 februarie 2007

CLASA A IX-A

Problema 1

Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat unde se consideră punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DE)$, $R \in (EF)$, $S \in (FA)$ astfel încât $MB + BN = QD + FR$ și $RF + FS = BN + DP$. Demonstrați că $\triangle MPR$ și $\triangle NQS$ au același centru de greutate.

* * *

Problema 2

a) Determinați numerele reale strict pozitive $x < y < z$ în progresie geometrică, știind că au

loc următoarele două egalități: $x + y + z = \frac{19}{18}$ și $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{133}{324}$.

b) Aflați numerele strict pozitive $a, b, c, r \in \mathbb{Q}$, știind că $a < b < c$ sunt în progresie aritmetică de rație $r + 1$, iar numerele $a < b + 2 < c + 12$ sunt în progresie geometrică de rație $r + a$.

* * *

Problema 3

a) Demonstrați că $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{4} \sin 4x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați toate numerele naturale n pentru care expresia

$$E(x) = \sin^n x \cos nx + \cos^n x \sin nx - \frac{n}{4} \sin 4x$$

este independentă de $x \in \mathbb{R}$.

Cristinel Mortici

Concursul de Matematică și Informatică "Grigore Moisil"
Ediția a III-a, Urziceni, 2-4 februarie 2007

CLASA A IX-A
SOLUȚII

Problema 1. Notăm $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AF}$ și $AB = 1$. Avem

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}) + (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ}) + (\overrightarrow{RF} + \overrightarrow{FS}) = \\ &= MB \cdot u + BN(u + v) + PD \cdot v - DQ \cdot u - RF(u + v) - FS \cdot v = \\ &= (MB + BN - DQ - RF)u + (BN + PD - RF - FS)v = 0 \cdot u + 0 \cdot v = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Problema 2. a) Fie $y = \sqrt{xz} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 19/18 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 133/324 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{xz} + z = 19/18 \\ x^2 + xz + z^2 = 133/324 \end{cases}$.
 Avem $x^2 + xz + z^2 = (x + z)^2 - (\sqrt{xz})^2 = (x + \sqrt{xz} + z)(x - \sqrt{xz} + z)$. Sistemul devine

$$\begin{cases} x + \sqrt{xz} + z = 19/18 \\ (x + \sqrt{xz} + z)(x - \sqrt{xz} + z) = 133/324 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \sqrt{xz} + z = 19/18 \\ x - \sqrt{xz} + z = 7/18 \end{cases},$$

de unde $x + z = 13/18$, $xz = 1/9$, deci $x = 1/2$, $z = 2/9$, apoi $y = 1/3$.

$$\text{b) } a = b - r - 1, c = b + r + 1 \Rightarrow \begin{cases} b + 2 = a(r + a) \\ c + 12 = (b + 2)(r + a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + 2 = (b - r - 1)(b - 1) \\ b + r + 13 = (b + 2)(b - 1) \end{cases}.$$

Prin eliminarea lui r , $r = b - 1 - \frac{b+2}{b-1} = (b+2)(b-1) - b - 13$, de unde $b^3 - 2b^2 - 12b + 16 = 0$ sau $(b - 4)(b^2 + 2b - 4) = 0$. Se produce soluția rațională $b = 4$, de unde $r = 1$, $a = 2$, $c = 6$.

Problema 3. a) $\sin^3 x \cdot \cos x (4 \cos^2 x - 3) + \cos^3 x \cdot \sin x (3 - 4 \sin^2 x) =$

$$= 3 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{2} \cdot \sin 2x \cos 2x = \frac{3}{4} \sin 4x.$$

b) $n = 0$ satisface și $n = 1$ nu satisface. Fie $n \geq 2$. $E(0) = 0$, deci $E(x) = 0$ sau

$$\sin^n x \cos nx + \cos^n x \sin nx = \frac{n}{4} \sin 4x.$$

Apoi pentru $x = \pi/8$,

$$\begin{aligned} \frac{n}{4} &= \sin^n \frac{\pi}{8} \cos \frac{n\pi}{8} + \cos^n \frac{\pi}{8} \sin \frac{n\pi}{8} < \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{n\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{n\pi}{8} = \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{8} \right) \leq 1, \end{aligned}$$

deci $n \leq 3$. $n = 3$ verifică, $n = 1$ nu. Pentru $n = 2$, $\sin^2 x \cos 2x + \cos^2 x \sin 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$, e falsă pentru $x = \pi/4$.

Concursul de Matematică și Informatică "Grigore Moisil"
Ediția a III-a, Urziceni, 2-4 februarie 2007

CLASA A X-A

Problema 1

Fie $a, b, z \in \mathbb{C}$, cu $|a| \neq |b|$. Demonstrați că $\left| \frac{az + b}{bz + \bar{a}} \right| = 1$ dacă și numai dacă $|z| = 1$.

* * *

Problema 2

- a) Fie $a, b, c \in (1, \infty)$ cu proprietatea că $\frac{a}{b} < \frac{b}{c}$. Demonstrați că $\frac{\ln a}{\ln b} < \frac{\ln b}{\ln c}$.
- b) Folosind eventual punctul a), demonstrați inegalitatea $\lg 12 < \log_9 10 \cdot \log_9 11$.

Cristinel Mortici

Problema 3

- a) Fie $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $a \neq b$. Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x b^{1-x} + a^{1-x} b^x$ este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ și este strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.
- b) Aflați $x, y \in \mathbb{R}$ din relația $2 \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^y \right] + 3 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^y \right] = 4\sqrt{6}$.

* * *

Concursul de Matematică și Informatică "Grigore Moisil"
Ediția a III-a, Urziceni, 2-4 februarie 2007

CLASA A X-A

SOLUȚII

Problema 1

$$\left| \frac{az+b}{\overline{bz+a}} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{az+b}{\overline{bz+a}} \cdot \frac{\overline{az+b}}{\overline{bz+a}} = 1 \Leftrightarrow (|z|^2 - 1)(|a|^2 - |b|^2) = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Problema 2

a) $\sqrt{\ln a \ln c} \leq \frac{\ln a + \ln c}{2} = \ln \sqrt{ac} < \ln b.$

b) $\lg 12 = \log_{10} 12 = \log_{10} 11 \cdot \log_{11} 12 < \log_9 10 \cdot \log_9 11$, deoarece $\frac{11}{10} < \frac{10}{9}$ și $\frac{12}{11} < \frac{11}{9}.$

Problema 3

a) Fie $a > b$, $x > y > 1/2$. $f(x) - f(y) = \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{x-y} - 1 \right] \cdot \left[b \left(\frac{a}{b} \right)^y - a \left(\frac{b}{a} \right)^x \right] > 0$ ($x+y > 1$).

b) Fie $g(x) = 3^x \cdot 2^{1-x} + 3^{1-x} \cdot 2^x = 2 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^x + 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^x$. Din a), $g(x) \geq g(1/2) = 2\sqrt{6}$, deci

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left[\left(\frac{3}{2} \right)^x + \left(\frac{3}{2} \right)^y \right] + 3 \cdot \left[\left(\frac{2}{3} \right)^x + \left(\frac{2}{3} \right)^y \right] = \\ = g(x) + g(y) \geq 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Rezultă $x = y = 1/2$.

Concursul de Matematică și Informatică "Grigore Moisil"
Ediția a III-a, Urziceni, 2-4 februarie 2007

CLASA A XI-A

Problema 1

Fie $X, Y \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ diferite de matricea nulă, cu proprietatea că $X + Y = I_k$ și $XY = 0_k$.

- a) Demonstrați că dacă $a, b \in \mathbb{C}$ sunt astfel încât $aX + bY = I_k$, atunci $a = b = 1$.
b) Demonstrați că pentru $a, b \in \mathbb{C}$ și $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea $(aX + bY)^n = I_k$ dacă și numai dacă a și b sunt rădăcini de ordinul n ale unității.

Cristinel Mortici

Problema 2

a) Se consideră un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ descrescător și convergent la zero. Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1}a_n$ este convergent.

b) Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ un șir definit prin relația de recurență $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{b_n}$, cu $b_1 > 0$. Demonstrați că șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ definit prin $y_n = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{b_n}$ este convergent.

* * *

Problema 3

Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin relația de recurență $a_{n+1} = a_n \cdot e^{\frac{1}{a_n}}$, cu $a_0 > 0$. Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător, nemărginit și $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n a_n = 1$.

Cristinel Mortici

Concursul de Matematică și Informatică "Grigore Moisil"
Ediția a III-a, Urziceni, 2-4 februarie 2007

CLASA A XI-A

SOLUȚII

Problema 1

- a) $aX + bY = a(X + Y) + (b - a)Y = I \Rightarrow (b - a)Y = (1 - a)I \Rightarrow a = b = 1$.
 b) Prin inducție $(aX + bY)^n = a^n X + b^n Y$, deci $a^n X + b^n Y = I_k \Leftrightarrow a^n = b^n = 1$.

Problema 2

- a) $x_{2n+2} - x_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$ și

$$x_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

deci (x_{2n}) convergent. Analog $x_{2n+3} - x_{2n+1} = -a_{2n+2} + a_{2n+3} \leq 0$ și

$$x_{2n+1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + a_{2n+1} \geq 0.$$

$(x_{2n}), (x_{2n+1})$ sunt convergente și $x_{n+1} - x_n = (-1)^{n+1} a_{n+1} \rightarrow 0$, deci (x_n) este convergent.

- b) Dacă (b_n) mărginit, atunci ar fi convergent la $l \in \mathbb{R}$. Rezultă $l = l + \frac{1}{l}$, fals. Rămâne $b_n \rightarrow \infty$, deci $\frac{1}{b_n} \rightarrow 0$ (descrescător) și se aplică a).

Problema 3

$a_{n+1}/a_n = e^{\frac{1}{a_n}} > 1$. Dacă $a_n \rightarrow l > 0$, atunci $l = l e^{\frac{1}{l}} \Rightarrow e^{\frac{1}{l}} = 1$, imposibil, deci $a_n \rightarrow \infty$. Cu lema Cesaro-Stolz de două ori, avem

$$\begin{aligned} \lim \frac{\ln a_n}{\ln n} &= \lim \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim \frac{\ln \frac{a_{n+1}}{a_n}}{\frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \\ &= \lim \frac{\ln e^{\frac{1}{a_n}}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{a_n} = \lim \frac{n+1-n}{a_{n+1}-a_n} = \\ &= \lim \frac{1}{a_n \left(e^{\frac{1}{a_n}} - 1\right)} = \lim \frac{\frac{1}{a_n}}{e^{\frac{1}{a_n}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1. \end{aligned}$$

Concursul de Matematică și Informatică "Grigore Moisil"
Ediția a III-a, Urziceni, 2-4 februarie 2007

CLASA A XII-A

Problema 1

- a) Aflați $\min_{a \in \mathbb{R}} \int_0^1 |x - a| \, dx$ și indicați valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care se realizează acest minim.
- b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, definim $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. Demonstrați că $I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2n+2}$.

* * *

Problema 2

- a) Fie G grup comutativ și H submulțime nevidă, finită a lui G cu proprietatea că pentru orice $x, y \in H$, avem $x^2 y \in H$ și $x^3 y \in H$. Demonstrați că H este subgrup al lui G .
- b) Fie G un grup și H un subgrup al lui G . Demonstrați că dacă mulțimea $G \setminus H$ este finită, atunci G este grup finit.

* * *

Problema 3

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție periodică și care admite primitive și fie $F \in \int f$.

- a) Demonstrați că există și este unic un număr real a astfel încât funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = ax + F(x)$ este mărginită.
- b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x^2}$.

Cristinel Mortici

Concursul de Matematică și Informatică "Grigore Moisil"
Ediția a III-a, Urziceni, 2-4 februarie 2007

CLASA A XII-A
SOLUȚII

Problema 1

- a) $a \leq 0 \Rightarrow I = \int_0^1 (x - a) \, dx = \frac{1}{2} - a \geq \frac{1}{2}$
 $a \geq 1 \Rightarrow I = \int_0^1 (a - x) \, dx = a - \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 $a \in (0, 1) \Rightarrow I = \int_0^a (a - x) \, dx + \int_a^1 (x - a) \, dx = a^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{1-a^2}{2} - a(1-a) = \frac{1}{2} - a(1-a) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.
 Rezultă că $\min = \frac{1}{4}$, pentru $a = \frac{1}{2}$.

- b) Avem $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ și procedăm prin inducție. Dacă $I_k I_{k+1} = \frac{\pi}{2k+2}$, $1 \leq k \leq n$, atunci

$$I_{n+1} I_{n+2} = \frac{n}{n+1} I_{n-1} \cdot \frac{n+1}{n+2} I_n = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n+4}.$$

Problema 2

- a) Fie $x \in H \Rightarrow x^3 \in H \Rightarrow x^5 \in H \Rightarrow \dots$ și H finit, deci $x^{2i+1} = x^{2j+1} \Rightarrow x^{2k} = e$ ($k = |i - j|$).
 $x^{-1} = x^{2k-1} \in H$, deci $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.
 Fie $x, y \in H \Rightarrow (x^2 y)^2 (x^3 y)^{-1} \in H \Rightarrow xy \in H$.
 b) Fie $x \in G \setminus H$ arbitrar fixat. $f : H \rightarrow G \setminus H$, $f(h) = hx$ este injectivă și $G \setminus H$ finită $\Rightarrow H$ finit $\Rightarrow G = H \cup (G \setminus H)$ este finit.

Problema 3

- a) $F(x+t) - F(x) = c$ (constantă) $\Rightarrow \phi(x) = F(x) - \frac{c}{T}x$ este T -periodică și continuă $\Rightarrow \phi$ este mărginită, deci $a = -\frac{c}{T}$. Dacă $ax + F(x)$ și $bx + F(x)$ sunt mărginite, atunci diferența este mărginită $\Rightarrow (b-a)x$ este mărginită $\Rightarrow a = b$.
 b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax + F(x)}{x^2} - \frac{a}{x} \right) = 0$.